三平方の定理を主題とする「数学入門」講義案

鹿　島　秀　元

１．はじめに

或る意味当然の事であるが，どの講義・授業でも良い題材（本稿での三平方の定理）を選べば，知識の有機的関連を豊富に提示する事が可能となり，そうする事によって学生達に多くの真の知識を修得させる事が可能となる．真の知識，及びそれに内包されているアイデアは，様々な場面で柔軟に応用させる事が可能であり，そう簡単には欠落しないものである．細切れの断片的知識は一時的に沢山修得する事が可能であるが，長期的に見ればその殆どが忘却の彼方に消え去り，応用などできる訳が無い[1)]．

本稿では，知識の有機的関連を見据えた，高等学校の「総合的な探求の時間」，或いは高校数学をあまり修得していない文系大学生の為の三平方の定理を主題にする所謂「数学入門」という講義の一つの講義案について考察する[2)]．第２節では，三平方の定理とそこから派生するmathematical proofを知識の有機的関連の例として論述する．第３，４，５節では，知識の有機的関連の例としてそれぞれ，trigonometric function, Newton's method, Pythagorean tripleを論述する[3)]．但し，個々全てについて詳述したいところであるが，そうすれば本稿だけでは収まりきらないので，そう詳しくは論じ得ない箇所が有る事を注意しておく．

１）W.W.Sawyerは『数学のおもしろさ』（岩波書店，東健一訳，1955年）で，bowelとvowelを混同したイギリスの児童が書いた答案「腹部ニハ胃ト腸トガアル．腸ハA，E，I，O，Uデアル」を紹介し，有機的関連を軽視した教授法，児童，生徒，学生の立場では丸暗記型の学習法をかなり昔に既に批難している．この事は現在，改善されているのであろうか疑問である．
２）数学に関して言えば，三平方の定理だけでなく，知識の有機的関連を提示可能な題材は数多く存在する．本稿では，三平方の定理に限定する．
３）勿論，本稿の例だけが唯一のものではない．

２．三平方の定理，派生その０― mathematical proof

先ず，三平方の定理を提示する．

【定理（Pythagorean theorem)】 直角三角形の斜辺の長さを c，直角を挟む２辺の長さをそれぞれ a，b とするとき，$a^2+b^2=c^2$ が成立する．■

この定理自身の内容については，よく知られており，中学校の数学で学ぶ．しかし，この定理の歴史や証明方法等については必ずしもそうではない．そこで，次のようなものを全て或いはいくつかを選択して講義する案が考えられる．

①ピタゴラス（Pythagoras）は，紀元前６世紀に活躍したギリシャの数学者である．サモス島生れで，後に南イタリアのクロトンで教団を創立した．この教団で共同研究に従事した者達をピタゴラス学派という．ピタゴラスは「万物は数である」を信条として万物の原理を整数に置いて整数の比，つまり有理数で世界を解釈しようとした．このようなピタゴラス学派の背景にある哲学や地理的歴史的事実を解説する．ピタゴラスが発見したピタゴラス音階（現在の音階の原点）からバッハの平均律に至るまでの経緯について解説する事も可能であろう．

②三平方の定理の発見者は，ピタゴラスと考える者が多いが，詳しい事は分からないのが事実である．とは言え，ピタゴラス教団の発見である事は，まず間違いないとされている．三平方の定理を適用すれば，１辺の長さが１である正方形の対角線の長さが $\sqrt{2}$ である事が直ちに分かる．しかし $\sqrt{2}$ は有理数でない数，つまり無理数であり，これが基本的で身近な図形である正方形の中に見出されてしまうのである．有理数で世界を解釈しようとしていたピタゴラス教団が，皮肉にも自身が発見した三平方の定理で，有理数だけでは世界を解釈できない事が分かってしまうのである．余裕があれば，$\sqrt{2}$ が無理数である事の背理法による証明を解説しても良いであろう．

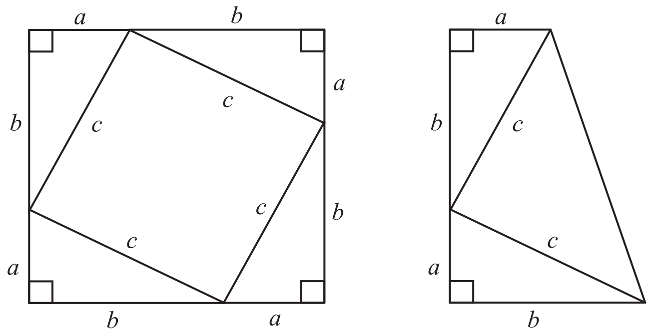
③三平方の定理の厳密な証明は，後のユークリッド（Euclid, 紀元前３世紀頃の古代エジプトのギリシャ系の数学者）がしている．このユークリッドの証明法を解説する．しかしこれは，三角形の合同と等積変形を駆使したものとなっているので，幾何学的証明方法を苦手，不慣れとする学生達にはハードルが高いかもしれない．ここで重要な事であるが，長年の経験からこのような場合, 無理にユークリッドの証明法を解説しても良い教育効果は望めない．とは言え，避けて通ってしまっては無意味となるので，レポート課題とするなどの選択肢も考える必要ある．幸い『ユークリッド原論』(共立出版，中村幸四郎，寺坂英孝，伊藤俊太郎，池田美恵　訳・解説）にその証明が所収されている．

④三平方の定理の比較的簡単な証明方法をいくつか紹介し解説する．このとき，以下の２つは外せない．

・１つ目は下図左のように，１辺の長さが $a+b$ である正方形の各辺を順に a，b に区切り，４隅に斜辺の長さが c，直角を挟む２辺の長さがそれぞれ a，b である合同な４つの直角三角形を置いていく．すると，内側には四角形ができるが，この四角形が正方形である事を学

生達に必ず確認させる事が肝要である．もし必要であれば，正方形の定義まで戻らないといけない[4]．

三平方の定理の証明は，（外側の１辺の長さが$a+b$である正方形の面積）−（４隅の直角三角形の面積の合計）=（内側の１辺の長さが c である正方形の面積），という関係を文字式で表す事により直ちに完了する：$(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab=a^2+b^2=c^2$．



・２つ目は，意外な人物の証明方法である．この人物とは，James Abram Garfield（1831－1881）で，アメリカ合衆国の第20代大統領である．暗殺された２人目の大統領で，暗殺された為，在任期間も２番目に短い大統領である．上図右のように，２つの合同な直角三角形を左の縦の線分が「く」の字型にならないよう直線となるように置き，全体として台形を作る．すると，台形の内側に等辺の長さが c である直角２等辺三角形ができる[5]．

三平方の定理の証明は，（台形の面積）−（上下２つの合同な直角三角形の面積の合計）=（内側の等辺の長さが c である直角２等辺三角形の面積），という関係を文字式で表す事により直ちに完了する[6]：$\frac{1}{2}(a+b)^2-2\times\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2$，整理して両辺を２倍すると，$a^2+b^2=c^2$．

尚，このGarfieldの証明方法は，上図右とそれを上下逆にしたものを左右に並べると上図左になるので，１つ目の証明方法と本質的に同じものである．しかし，Garfieldの証明方法を敢えて提示する理由は，上図２つを見比べる事により，台形の面積を求める公式を理解する為の布石となるからである．この事を注意しておく．

⑤三平方の定理の証明方法は，非常に沢山存在していて，数百種類にも及ぶと言われている．一般的に１つの定理の複数の証明を積極的に理解する事は，多角的な思考力を養い，様々な新しいアイデアを獲得する絶好の機会となるので，非常に意義深く，大変重要である事を学生達に理解させる．三平方の定理の様々な証明方法を紹介している『ピタゴラスの定理―4000年の歴史』（岩波書店，Eli Maor著，伊理由美訳，2008年）や『ピタゴラスの定理』（東海大学出版部，大矢真一，2001年）などの書籍を紹介する．

4）意外と台形，平行四辺形，長方形，ひし形，正方形の定義を知らなかったり，忘れてしまったりしている学生が多い．この機会に定義の大切さと共に，復習しておきたい．

5）この場合も台形ができている事，内側の三角形が直角三角形である事を必ず学生達に確認させる事が肝要である．

6）台形の面積が，（上底＋下底）×高さ÷２…①で求まる事を忘れている，或いは覚えてはいるが①で求められる理由を理解していない学生達がいれば，①を証明する事が必要である．

⑥**【定理（Pythagorean theoremの逆）】**　3辺の長さがa，b，cである三角形において，$a^2+b^2=c^2$ が成立するならば，その三角形は長さがcである辺を斜辺とする直角三角形である．■

この定理の（三角形の合同を適用すれば非常に簡明で感銘できる）証明を学生達に理解させる．

この事を土台にして，論理的思考の基礎である命題のnegation，converse，inverse，contrapositionを復習し，元の命題とそのcontrapositionの真偽は常に一致する事を確認する．更に，necessary condition，sufficient conditionの復習もする．これらの事を踏まえて，定理の逆が成立する場合には，その証明が必要である事を十分に理解させる．逆が自動的に成立すると考えている学生は意外と多く存在している（社会人にも当てはまるであろう）．

3．派生その1— trigonometric function

本節では，三平方の定理から三角比，三角関数への派生を述べる．以下に示す順に講義し，①,②,③は基本なので必ず講義し，クラスの程度によって④を講義すればよい．

①三角比つまり$\sin\theta^\circ$，$\cos\theta^\circ$，$\tan\theta^\circ$ の定義の復習：$\angle \mathrm{BCA}=90^\circ$ である直角三角形ABCにおいて，$\angle \mathrm{ABC}=\theta^\circ$ とする．このとき，$\dfrac{AC}{AB}$，$\dfrac{BC}{AB}$，$\dfrac{AC}{BC}$ をそれぞれ $\sin\theta^\circ$，$\cos\theta^\circ$，$\tan\theta^\circ$ と定義する．

この定義から，直ちに次の基本的で重要な関係式が得られる事を丸暗記させずに理解させる事が肝要である．

$\tan\theta^\circ=\dfrac{\sin\theta^\circ}{\cos\theta^\circ}$，$AC=AB\cdot\sin\theta^\circ$，$BC=AB\cdot\cos\theta^\circ$，$AC=BC\cdot\tan\theta^\circ$．また，直角三角形ABCに三平方の定理を適用すれば，$AB^2=AC^2+BC^2=AB^2\cdot\sin^2\theta^\circ+AB^2\cdot\cos^2\theta^\circ$が成立するが，両辺を$AB^2$で割る事により$1=\sin^2\theta^\circ+\cos^2\theta^\circ$という非常に重要な関係式が得られる．更にこの式の両辺を$\cos^2\theta^\circ$で割ると，$\dfrac{1}{\cos^2\theta^\circ}=\tan^2\theta^\circ+1$を得る．

②上の①の三角比の定義の拡張：$0^\circ\leq\theta^\circ\leq180^\circ$とするときの単位円（原点を中心とする半径1の円）による$\sin\theta^\circ$，$\cos\theta^\circ$，$\tan\theta^\circ$の定義．三角比の定義を拡張しても,①の関係式は全て成立する事を理解させる．

③余弦定理（law of cosines）の復習：余弦定理は現行では高校1年生で学ぶ事になっている定理で,△ABCにおいて，$\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$，$\cos\angle \mathrm{BCA}=\dfrac{BC^2+AC^2-AB^2}{2\cdot BC\cdot AC}$，$\cos\angle \mathrm{CAB}=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2\cdot AC\cdot AB}$ が成立するという定理である．この余弦定理は，三平方の定理を適用して証明できるものである．

更にこの余弦定理は，三平方の定理の拡張になっている．つまり，例えば$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$とす

ると，$\cos\angle ABC = \cos 90^\circ = 0$ なので，$0 = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$ となる．即ち，$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 0$ であり，$AC^2 = AB^2 + BC^2$ が結論できる．これは，三平方の定理そのものである．

時間的余裕があれば，正弦定理を証明しても良い．但し，この証明には中学数学で学ぶ円周角の定理を使い，三平方の定理は使わないので，講義内容が発散しない事に注意する必要がある．

④弧度法（弧の長さが１である半径１の扇形の中心角を1rad（ラジアン，この単位は普通省略する事が多い）とする単位で角の大きさを表す方法である事）を理解させる．従って，$180^\circ = \pi$ rad，$360^\circ = 2\pi$ radであり，$\theta^\circ = \dfrac{\pi\theta}{180}$ rad，θ rad $= \left(\dfrac{180\theta}{\pi}\right)^\circ$ である．因みに1rad≒57.3°である．

弧度法を踏まえて，一般角（負の角やπ radを超える角，つまり任意の角）に対する三角関数の定義．この定義は②の更なる拡張になっていてこの場合も，①の関係式は全て成立する事を理解させる．また，$-1 \le \cos\theta \le 1$，$-1 \le \sin\theta \le 1$，$-\infty < \tan\theta < +\infty$ が成立する事を理解させる．

⑤三平方の定理を適用すれば直ちに，３つの角が $\dfrac{\pi}{6}$ rad，$\dfrac{\pi}{3}$ rad，$\dfrac{\pi}{2}$ radである直角三角形の３辺の長さの比が $1:\sqrt{3}:2$ である事や，３つの角が $\dfrac{\pi}{4}$ rad，$\dfrac{\pi}{4}$ rad，$\dfrac{\pi}{2}$ radである直角三角形の３辺の長さの比が $1:1:\sqrt{2}$ である事が分かる．

これらの事を土台にして，下表の sin，cos，tanの値を丸暗記ではなく自分で求められるようにする事が非常に重要である．

と言うのも，$\sin\dfrac{4\pi}{3}$，$\cos\dfrac{7\pi}{4}$，$\tan\dfrac{7\pi}{6}$等の値は自分で求める事が可能である筈なのに，忘れてしまったのでこれらの値は分からないと言う者が少なからずいる．この者達は，高校１年生の数学しか学習していない者達である．一方で，高校１年生の数学では普通これらの値を学習しない．

つまり，学習したのか，していないのかの記憶もない．丸暗記ばかりに頼って，理解をしていない証左であり，実に恐ろしい丸暗記型学習の弊害である．

θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin\theta$																
$\cos\theta$																
$\tan\theta$					×								×			

尚，$\tan\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\dfrac{3\pi}{2}$ は存在しない事に注意を促す必要がある．

４．派生その２― Newton's method

前節の⑤で特殊な直角三角形の３辺の長さの比 $1:\sqrt{3}:2$ や $1:1:\sqrt{2}$ が三平方の定理から直ちに導出される事を述べた．しかし，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ を小数で表すとおよそどれくらいの値になるかを知らない者達が一定数いる[7)]．近頃は，$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41421356$ を「ヒトヨヒトヨニヒトミゴロ」と語呂合わせで覚えないのであろうか.

そして $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の値を自分で求める事ができる者は，ほぼ皆無である．平方根の意味を理解していれば，「開平法」を知らずとも，時間，手間はかかるが小数第２位ぐらいまでは，求められそうなものだが….

天下り式に「開平法」を教えても無意味であるし，「開平法」で平方根を求める事ができる理屈を理解させながら，「開平法」の手法を教えるという選択肢もあるが，本節では微分に関連付けて $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の値の求め方を教える選択肢を選ぶ事にする.

①２次の実多項式函数 $y=f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ を対象に，$x=a$ で微分可能である事の定義（ $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する）を説明し，導関数 $y'=f'(x)=2a_2x+a_1$ が接線の傾きを与える事を理解させ，接線の方程式が具体的に求められる（ $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(\alpha\,,\,f(\alpha))$ における接線の方程式は，$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ である）事を理解させる.

この段階で微分の厳密な定義を展開するのは，時期尚早である事を注意しておく.

②Newton's methodの原理（高校数学では明示的に学習しないと思う）を理解させ，これを具体的に２次関数 $y=f(x)=x^2-a$（但し a は自然数）に適用する為，一般的な手順を理解させる：

（Ⅰ）$y=f(x)=x^2-a$ のグラフ上の点 $(0\,,\,f(0))$ 以外の点 $(\alpha\,,\,f(\alpha))$ における接線の方程式 $y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2-a=2\alpha x-\alpha^2-a$ を求める.

（Ⅱ）この接線と x 軸との交点の x 座標（ $\dfrac{\alpha^2+a}{2\alpha}$ ）を求める.

（Ⅲ） $\alpha_1=\alpha$ ， $\alpha_{n+1}=\dfrac{{\alpha_n}^2+a}{2\alpha_n}$（$n=1\,,\,2\,,\,3\,,\cdots$）なる漸化式を考える.

（Ⅳ）$A^2>a$ を満たす最小の自然数 A を α として，上の漸化式で α_n を計算する．このとき，α_n が $\sqrt{a}$ の近似値を与える. n の値が大きくなればなるほど，近似の精度が高まるので，必要に応じて n の値を決める.

（実例） $a=7$ とする．$y=f(x)=x^2-7$ の点 $(0\,,\,-7)$ 以外の点 $(\alpha\,,\alpha^2-7)$ における接線の方程式 $y=2\alpha x-\alpha^2-7$ であり，この接線と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{\alpha^2+7}{2\alpha}$ である.

次に α の値であるが，７を超える最小の平方数は $3^2=9$ なので，$\alpha_1=\alpha=3$ として，以下，漸化式 $\alpha_{n+1}=\dfrac{{\alpha_n}^2+7}{2\alpha_n}$ を順次計算していくと，$\sqrt{7}=2.645751311\cdots$ の近似値を得る事ができる.

７）中には平方根の意味を理解していない者も存在していて，この事実は非常に憂慮すべき事であるが，本稿では敢えて問題にしない事にする.

実際，３回の計算（$n=4$）で小数第８位まで一致する近似値が得られる：

$$\alpha_2=\frac{\alpha_1{}^2+7}{2\alpha_1}=\frac{3^2+7}{2\times3}=\frac{8}{3}=2.\dot{6},\quad \alpha_3=\frac{\alpha_2{}^2+7}{2\alpha_2}=\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2+7}{2\times\frac{8}{3}}=\frac{127}{48}=2.6458\dot{3},$$

$$\alpha_4=\frac{\alpha_3{}^2+7}{2\alpha_3}=\frac{\left(\frac{127}{48}\right)^2+7}{2\times\frac{127}{48}}=\frac{32257}{12192}=2.645751312\cdots.$$

因みに，$\alpha_5=\dfrac{\alpha_4{}^2+7}{2\alpha_4}=\dfrac{2081028097}{786554688}=2.645751311064590590\cdots$ と小数第18位まで一致する．

（参考）$a=2,3,5,6$ のときの $\sqrt{a}$ の近似値をNewton's methodで求めた結果を下表にまとめておく．

$\sqrt{a}$	$\alpha_1=\alpha$	n	$\alpha_{n+1}=\dfrac{\alpha_n{}^2+a}{2\alpha_n}$
$\sqrt{2}=1.414213562373\cdots$	2	4	$\alpha_5=\dfrac{665857}{470832}=1.414213562374\cdots$
$\sqrt{3}=1.73205080\cdots$	2	3	$\alpha_4=\dfrac{18817}{10864}=1.73205081\cdots$
$\sqrt{5}=2.2360679774997\cdots$	3	4	$\alpha_5=\dfrac{4870847}{2178309}=2.2360679774999\cdots$
$\sqrt{6}=2.449489742\cdots$	3	4	$\alpha_5=\dfrac{46099201}{18819920}=2.449489743\cdots$

③Newton's methodでは平方根の近似値を数値として求める事が主眼になるが，幾何学的に捉える事も重要である．Newton's methodとは直接には関係しないがこの観点から，本項で少し述べておく．

・平方根，特に $\sqrt{2}$ は意外に身近なところに見られる．勿論，正方形の対角線の長さは，正方形の１辺の長さの $\sqrt{2}$ 倍の長さである．

こればかりでなく，身近にある紙にも $\sqrt{2}$ が見出される．A判，B判の紙はどちらの判でも，(短い辺の長さ)：(長い辺の長さ)＝1：$\sqrt{2}$ …(F)になっている．この事実(F)を，辺の長さを定規で実測して確かめるのではなく，折り紙で確かめるにはどうすれば良いか，という問い掛けを学生達にして，十分な時間をかけて試行錯誤させる．その後で，解答例として「AB＞BCなるA判，B判の長方形ABCDにおいて，辺BCが辺BA上にくるように折る．このときにできる折り目（当然ながら辺BCの $\sqrt{2}$ 倍の長さ）の上に辺BAがくるように折ると，ぴったり同じ長さである」という文を提示し，この文を読み取らせて各自に確認させる．

この事を含め，事実(F)が採用されている根拠（伊達酔狂で事実(F)が採用されている訳ではない）を調べさせ，レポート発表させる選択肢もある．

・三角形の相似を利用すれば，大工道具の曲尺で平方根を求める事ができる．

xy 平面に$a>0$として２点 $A(a,0)$，$B(-1,0)$をとる．次に，曲尺を次のⅰ)，ⅱ）の条件を

同時に満たすように設置する：

ｉ）曲尺の直角を挟む２辺がそれぞれ点A，Bを通る，

ⅱ）曲尺の直角の角がy軸上にある．

このとき，ⅱ）のy軸上の点を$C(0, c)$とすると，$\sqrt{a}=OC=|c|\cdots$(F)である．

以上の事を文で提示し，文を読み取らせ各自で(F)が成立する証明を書いてもらう（本質的には$\triangle OAC \backsim \triangle OCB$の証明とそこから帰結できる辺の比）．

曲尺は，ここで述べた事以外にも数学を応用した様々な便利で実用的な使用方法がある．例えば，２本の曲尺を使用すれば立方根も求める事ができる．このような事を調べ，或いは大工さんにインタビュー等をして，まとめて発表させるという選択肢もある．

曲尺という古来より使用されている非常に実用的な道具の使用方法に，一見役に立たないと思われがちな数学が豊富に介在している事を知る良い機会である．これを契機に「数学は古来より役に立ち，現在，未来でも役に立つ」という意識を少しでも学生達に分かってもらう契機にしたい．

５．派生その３― Pythagorean triple

本節では，Pythagorean tripleが１から始まる連続する奇数の和を利用して簡単に見つける事ができる事を論じる．Pythagorean tripleとは，$a^2+b^2=c^2$を満たす自然数の組(a, b, c)の事である．例えば，$3^2+4^2=5^2$なので，$(3, 4, 5)$はPythagorean tripleである．

自明の事であるが，Pythagorean theoremの逆により，Pythagorean tripleを見つける事は，３辺がどれも自然数値となっている直角三角形を見つける事と同じである．

以下に示すように，Σ計算の復習から始める．

①初項がa_1，公差がdの等差数列（一般項は$a_n=a_1+(n-1)d$）の初項a_1から第n項a_nまでの和S_nが$S_n=\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$となる理屈（知識として知っているかどうかではなく）を再確認させ，必要があれば証明して理解させる．C. F. Gaussの有名な逸話（小学校低学年の頃，誰に教わる事もなく本質的に等差数列の和を適用して１から100までの自然数の和を計算した）を紹介しても良いだろう．

②Σ計算の基本的な式，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$などが成立する理屈（知識として知っているかどうかではなく）を再確認させ，必要があれば証明して理解させる．これらの事実を知識として知っている者は多いが，これらが成立する事を証明できないものは意外と多い．

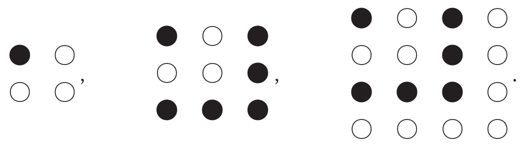
ここで，$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\{a_1+(k-1)d\}=\sum_{k=1}^{n}(a_1-d)+d\sum_{k=1}^{n}k=(a_1-d)n+d\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$

と上の①の結果が一致する事を確認させる事が肝要である．

③１番目の正の奇数である１からn番目の正の奇数$2n-1$までの和は，Σ計算で次のように

簡単に求まる：$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$.

この事実は，図形で解釈する事もできる．例えば，$1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$ は，以下の通りで，説明するまでもないであろう：



④上の③から $1+3+5+\cdots+(2n-3)=(n-1)^2$，$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$ が成立するので，$(n-1)^2+(2n-1)=n^2$ である．

ここでもし，n 番目の正の奇数 $2n-1$ が平方数であれば，$2n-1=s^2$（s は自然数）と表せるので，$(n-1)^2+s^2=n^2$ となり，Pythagorean triple $(n-1\,,\,s\,,\,n)$ が得られた事になる．

奇数の平方は当然奇数である[8]ので，平方数である奇数は無限に存在する．従って，ここで説明した方法でPythagorean tripleが無数に得られる事になる．

以上をまとめると，s を3以上の奇数とするとき，$\left(s\,,\frac{s^2-1}{2}\,,\frac{s^2+1}{2}\right)$ なる３組の自然数はPythagorean tripleである．参考の為，いくつか小さい順に例を挙げておく：

$(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(7,24,25)$, $(9,40,41)$, $(11,60,61)$, $(13,84,85)$, $(15,112,113)$, $(17,144,145)$，$(19,180,181)$，$(21,220,221)$.

⑤全てのPythagorean tripleが④の方法で得られるとは限らない事に注意する必要がある．即ち，$\left(s\,,\frac{s^2-1}{2}\,,\frac{s^2+1}{2}\right)$ はPythagorean tripleであるための十分条件を与えているのに過ぎないのである．

例えば，$(8,15,17)$, $(12,35,37)$, $(20,21,29)$ などのPythagorean tripleは④の方法では得られない．因みに，これらのような④の方法で求める事ができないPythagorean tripleも無数に存在する事を注意しておく．

任意のPythagorean tripleを求める事は，発展課題にすると良いであろう．

６．まとめ

本稿では，三平方の定理を主題に数学の様々な分野（代数は勿論の事，幾何，解析，数学史）に派生させる講義・授業案の一例を論じた．カリキュラムの要請上，困難かもしれないが，知識を断片的に教えるのではなく，有機的な関連をもって教え，理解させる事が肝要である．本稿で示した一例は，高等学校の「総合的な探求の時間」などで扱う題材の参考となると思う．

８）この事実を数例の実例を挙げるだけで証明だと考えていたりする者や全く証明できない者も相当数存在している．

また，知識は理解を伴って修得しないと丸暗記では使い物にならない．あくまでも私見であるが，巷で結果として丸暗記を強要する講義・授業が多い気がする．

私の講義で，板書に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と書いたまま講義を終えると，学生からよく「$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と有理化しなくても構わないのですか？」と質問を受ける．そのとき必ず私は「有理化してもしなくてもどちらでも良い．では，なぜ有理化しないといけないの？」と問い返す事にしている．すると，「高校で有理化するように習いました．だけど，なぜかは分かりません」と返ってくる．

有理化をする事，またその仕方を（強要されたかどうかは不明だが）丸暗記してきたのであろう．一番大切な有理化をする意味を理解していないのである．勿論，質問した学生にはその意味を教える．そのときの学生の反応は，ほぼ100％「へー，そんな意味があったのですか．初めて知りました」というものである．

丸暗記主体的な退屈な，また抱腹絶倒的な面白い講義・授業ではなく，理解を伴った知的好奇心を刺激する面白く，有機的関連や派生を伴った（いとをかし）興味深い講義・授業を心掛けたい（自省を込めて）．

参考文献

銀林浩・野崎昭弘・小沢健一『家庭の算数・数学百科』日本評論社，2005年．

佐々木淳『身近なアレを数学で説明してみる』SBクリエイティブ，2019年．

遠山啓『数学入門（上）』岩波書店，1959年．

遠山啓『数学入門（下）』岩波書店，1960年．

遠山啓『数学のたのしさ』遠山啓著作集　数学論シリーズ第7巻，太郎次郎社，1981年．

柳谷晃『ぼくらは「数学」のおかげで生きている』実務教育出版，2015年．

W.W.Sawyer，東健一訳『数学のおもしろさ』岩波書店，1955年．